Problème 1

Afin d'exprimer le déplacement δ_C en C, on introduit une force auxiliaire fictive Q en C (Q prendra la valeur 0 par la suite)

1. Calcul des réactions en exprimant l'équilibre des forces et des moments de force

$$\sum \mathrm{F} : \mathrm{R_A} + \mathrm{R_B} = \mathrm{P} + \mathrm{Q}$$

$$\sum M_A : Q(\ell + a) + P\frac{\ell}{2} = R_B \ell$$

D'où

$$R_B = \frac{P}{2} + Q\frac{\ell + a}{\ell}$$

$$R_A = \frac{P}{2} - Q\frac{a}{\ell}$$

2. Energie de déformation

Energie totale accumulée par le système $U = U_1 + U_2$

Energie de déformation du ressort

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{R_B^2}{K}$$

Energie de déformation

$$U_2 = \int_0^{l/2} \frac{M_{AD}^2}{2EI} dx + \int_0^{l/2} \frac{M_{DB}^2}{2EI} dx' + \int_0^{a} \frac{M_{BC}^2}{2EI} dx''$$

Hypothèse de Castigliano

$$\delta_C = \left.\frac{\partial U}{\partial Q}\right|_{Q=0} = \left.\frac{\partial U_1}{\partial Q}\right|_{Q=0} + \left.\frac{\partial U_2}{\partial Q}\right|_{Q=0} = 0$$

où $\left.\frac{\partial U_1}{\partial Q}\right|_{Q=0} = \frac{P}{2K}\frac{a+\ell}{\ell}$

et $\left.\frac{\partial U_2}{\partial Q}\right|_{Q=0} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{\ell/2} M_{AD}\frac{\partial M_{AD}}{\partial Q} dx + \int_0^{\ell/2} M_{DB}\frac{\partial M_{DB}}{\partial Q} dx' + \int_0^{a} M_{BC}\frac{\partial M_{BC}}{\partial Q} dx''\right]_{Q=0}$

3. Calcul des moments

Sur AD : $0 \le x \le \ell/2$

$$M_{AD}(x) = R_A x = \frac{P}{2}x - \frac{aQ}{\ell}x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M_{\mathrm{AD}}}{\partial Q} = -\frac{a}{\ell}x$$

Sur BD : $0 \le x' \le \ell/2$

$$M_{BD}(x') = R_B x' - Q(a + x') = \frac{P}{2}x' + Q(\frac{a}{\ell}x' - a) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M_{BD}}{\partial Q} = \frac{a}{\ell}x' - a$$

Sur $CB : 0 \leq x'' \leq a$

$$M_{\mathrm{CB}}(x'') = -Qx'' \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M_{\mathrm{CB}}}{\partial Q} = -x''$$

4. Calcul de la rigidité

$$\left.\frac{\partial U_2}{\partial Q}\right|_{Q=0} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{\ell/2} -\frac{Pa}{2l}x^2\,dx + \int_0^{\ell/2}\left(-\frac{Pa}{2}x' + \frac{Pa}{2l}x'^2\right)dx'\right] = -\frac{Pa\ell^2}{16EI}$$

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial Q}\right|_{Q=0} = \frac{P}{2K}\frac{a+\ell}{\ell}$$

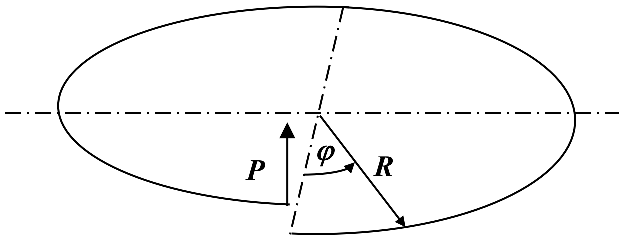
La somme des deux expressions permet de trouver la rigidité $\frac{P}{2K}\frac{a+\ell}{\ell} - \frac{Pa\ell^2}{16EI} = 0$

$$K = \frac{8EI}{\ell^3}\left(1 + \frac{\ell}{a}\right)$$

Problème 2

1. Introduction

Castigliano $\delta = \frac{\partial U}{\partial P}$



On ne considère que les moments de flexion et de torsion

2. Calcul du moment de flexion et de torsion

$$M_f = PR\sin\varphi \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M_f}{\partial P} = R\sin\varphi$$

$$M_t = PR(1-\cos\varphi) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M_t}{\partial P} = R(1-\cos\varphi)$$

3. Énergie de déformation

$$U_{M_f} = \int_0^{\ell} \frac{M_f^2}{2EI} ds$$

$$U_{M_{ft}} = \int_0^{\ell} \frac{M_{ft}^2}{2GI_p} ds$$

4. Le déplacement relatif des extrémités est donné par (Castigliano) :

$$\delta = \frac{1}{EI}\int_o^{2\pi} M_f \frac{\partial M_f}{\partial P} ds + \frac{1}{GI_p}\int_o^{2\pi} M_t \frac{\partial M_t}{\partial P} ds \quad \text{avec} \quad ds = Rd\phi$$

Donc :

$$\delta = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{2\pi} \sin^2\phi \, d\varphi + \frac{PR^3}{GI_p}\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2 d\phi = PR^3\left(\frac{\pi}{EI} + \frac{2\pi+\pi}{GI_p}\right)$$

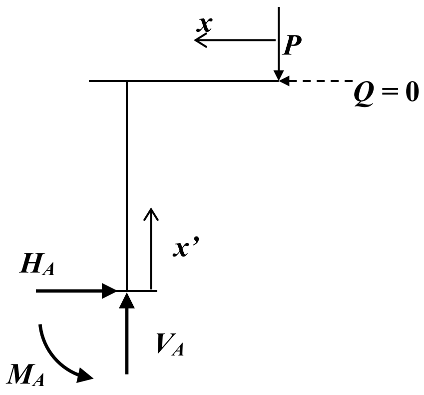
Avec $I_p = 2I$ (section circulaire) :

$$\delta = \frac{\pi PR^3}{EI}\left(1 + \frac{3E}{2G}\right) = 9.2\ mm$$

Problème 3

1. Introduction

   Castigliano



$$\delta_H = \left.\frac{\partial U}{\partial Q}\right|_{Q=0}$$

$$\delta_V = \frac{\partial U}{\partial P}$$

Équilibre des forces et des moments

$$H_A = Q$$

$$V_A = P$$

$$M_A = P\,\ell\, -\, Q\,h$$

2. Partie verticale

$$M(x) = -M_A - H_A x = Q(h-x) - P\ell$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -\ell \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial M}{\partial Q} = h - x$$

Flèche

$$\delta_H = \left.\frac{\partial U}{\partial Q}\right|_{Q=0} = \frac{1}{EI}\int_0^h M(x)\left.\frac{\partial M}{\partial Q}\right|_{Q=0} dx' = \frac{-P\ell h^2}{2EI}$$

Angle

$$\alpha = \frac{\partial \delta_H}{\partial h} = \frac{-P\ell h}{EI}$$

3. Partie horizontale

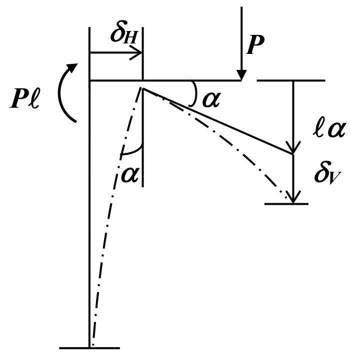
$$M(x) = -Px$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial M}{\partial Q} = 0$$

Flèche

$$\delta_V = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI}\int_0^\ell M(x)\frac{\partial M}{\partial P}dx = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

4. Déformée totale



$$\delta = \delta_V + |\alpha|\,\ell = \frac{P\ell^3}{3EI} + \frac{P\ell^2 h}{EI}$$

5. Expression du rapport

$$\delta_H = \delta_V$$

$$\frac{P\ell h^2}{2EI} = \frac{P\ell^3}{3EI} + \frac{P\ell^2 h}{EI} \quad \rightarrow \quad 2\ell^2 + 6\ell h - 3h^2 = 0$$

$$2\lambda^2 + 6\lambda - 3 = 0$$

Seule la valeur positive peut être retenue, donc :

$$\lambda = \frac{\sqrt{15} - 3}{2} \approx 0{,}436$$